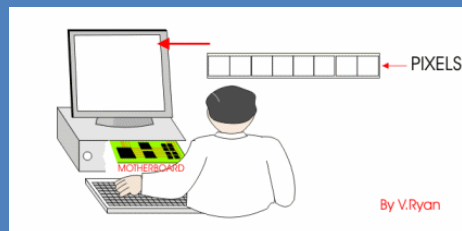
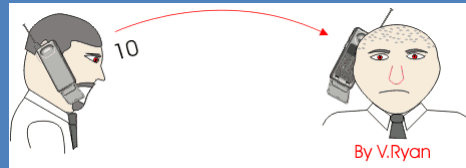
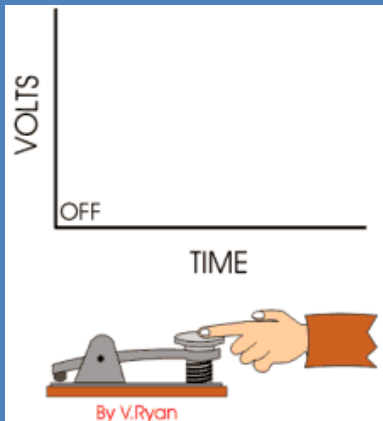


مکاترونیک

مدرس :
دکتر پدرام پیوندی



سیستم ددهی اعداد

$$491 = 4 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 1 \times 10^0$$

$$0.32 = 3 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2}$$

تبدیل مبنای اعداد

- توجه: با تغییر مبنای عدد، ماهیت آن عوض نمی شود بلکه فقط شکل نشان دادن آن تغییر می کند.

$$a = (a_n \dots a_2 a_1 a_0 \cdot a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m})_r$$

– مبنای ۲ (binary)

– مبنای ۱۰ (decimal)

– مبنای ۸ (octal)

– مبنای ۱۶ (hexadecimal) : شامل ارقام ۰ تا ۹ و a، b، c، d، e، f

تبدیل عدد از مبنای ۱۰ به مبنای ۲ (روش تقسیمات متوالی)

- قسمت صحیح عدد را متوالیا به ۲ تقسیم و قسمت اعشاری عدد را متوالیا در ۲ ضرب می کنیم.
- مزیت روش تقسیمات متوالی بر مبنا، سادگی پیاده سازی کامپیوتری آن است.

$$(301.2)_{10} = (?)_8$$

$$\begin{array}{r|l}
 301 & 8 \\
 \hline
 296 & 37 \\
 \hline
 5 & 32 \\
 \hline
 & 4 \\
 & 0 \\
 & \hline
 & 8 \\
 & 0
 \end{array}$$

$$(301.2)_{10} =$$

$$\begin{array}{r|l}
 301 & 8 \\
 \hline
 296 & 37 \\
 \hline
 5 & 32 \\
 \hline
 & 4 \\
 & 0 \\
 & \hline
 & 8 \\
 & 0
 \end{array}$$

$$0.2 \times 8 = 1.6$$

$$0.6 \times 8 = 4.8$$

$$0.8 \times 8 = 6.4$$

$$0.4 \times 8 = 3.2$$

$$0.2 \times 8 = 1.6$$

تبدیل عدد از مبنای ۱۰ به مبنای ۲ (روش افزودن وزن ها)

- بیشتر برای تبدیل اعداد دهدهی به اعداد دودویی کاربرد دارد.
- توان های صعودی ۲ را تا مقدار بزرگتر از عدد می نویسیم. با قرار دادن ۱ در زیر بزرگترین وزنی که مساوی یا کوچکتر از عدد دهدهی است شروع می کنیم. سپس آن وزن را از عدد کم می کنیم، این روال به همین ترتیب برای دیگر وزن ها تکرار می شود.

$$(43)_{10} = (?)_2$$

$$43 - 32 = 11$$

$$11 - 8 = 3$$

$$3 - 2 = 1$$

64	32	16	8	4	2	1
	1	0	1	0	1	1

تبدیل عدد از مبنای r^n به r و برعکس

- **تبدیل از مبنای r^n به r**

به ازای هر رقم، n رقم در مبنای r قرار می دهیم.

$$(257)_8 = (010101111)_2$$

- **تبدیل از مبنای r به r^n**

قسمت صحیح را از سمت راست و قسمت اعشاری را از سمت چپ به صورت دسته های n رقمی جدا می کنیم، و معادل هر دسته را در مبنای می نویسیم.

$$(101011111)_2 = (7)_8$$

مکمل ها (Complements)

- در مبنای r دو نوع مکمل مطرح می شود: مکمل $r-1$ (کاهش یافته) و مکمل r (مبنا)

مکمل کاهش یافته ($r-1$) در مبنای r

برای یافتن مکمل کاهش یافته عدد a (در مبنای r)، همه ارقام عدد a را از $r-1$ کم می کنیم.

$$a = (256.73)_{10} \xrightarrow{\text{مکمل } r-1} [743.26]$$

مکمل کاهش یافته (مکمل یک) در مبنای ۲

- برای یافتن مکمل ۱ عدد a در مبنای ۲، همه بیت ها را عوض می کنیم.

$$a = (10101)_2 \xrightarrow{\text{مکمل ۱}} [01010]$$

مکمل مینا (r)

- راه اول: مکمل r از جمع ۱ با مکمل r-1 حاصل می شود.
- راه دوم: صفرهای سمت راست عدد در صورت وجود تغییر نمی کند و اولین رقم غیر صفر را از r و سایر ارقام از r-1 کم می شوند.

$$a = (450.27)_{10} \xrightarrow{\text{مکمل } r} [549.73]$$

- برای یافتن مکمل ۲ در مینای ۲، صفرهای سمت راست و اولین یک را عوض نمی کنیم، سایر بیت ها را عوض می کنیم.

$$a = (10100)_2 \xrightarrow{\text{مکمل } 2} [01100]$$

نمایش اعداد دودویی علامت دار (منفی)

- سیستم علامت و مقدار: بیت سمت چپ هر عدد علامت است، اگر صفر باشد، عدد مثبت و اگر یک باشد، عدد منفی است.
- سیستم مکمل ۱: در روش مکمل ۱ مقدار منفی عدد، مکمل ۱ عدد است.
- سیستم مکمل ۲: در روش مکمل ۲ مقدار منفی عدد، مکمل ۲ عدد است.

- نکته: همه اعداد منفی دارای ۱ در سمت چپ ترین بیت اند.

نمایش اعداد دودویی علامت دار

- امروزه عملاً فقط از روش متمم دو استفاده می شود.

مکمل ۲	مکمل ۱	علامت و مقدار
0011 = +3	0011 = +3	0011 = +3
0010 = +2	0010 = +2	0010 = +2
0001 = +1	0001 = +1	0001 = +1
0000 = +0	0000 = +0	0000 = +0
-	1111 = -0	1000 = -0
1111 = -1	1110 = -1	1001 = -1
1110 = -2	1101 = -2	1010 = -2
1101 = -3	1100 = -3	1011 = -3

نمایش اعداد دودویی

مینیم عدد با n بیت	ماکزیم عدد با n بیت	
0	$(111\dots1)_2 = 2^n - 1$	سیستم بی علامت
$(111\dots1)_2 = -(2^{n-1} - 1)$	$(011\dots1)_2 = 2^{n-1} - 1$	سیستم علامت و مقدار
$(100\dots0)_2 = -(2^{n-1} - 1)$	$(011\dots1)_2 = 2^{n-1} - 1$	سیستم مکمل ۱
$(100\dots0)_2 = -2^{n-1}$	$(011\dots1)_2 = 2^{n-1} - 1$	سیستم مکمل ۲

تفریق دو عدد بی علامت با کمک مکمل مینا

عدد اول را با مکمل مینا عدد دوم جمع می کنیم.

- اگر $a \geq b$ ، عمل جمع یک رقم نقلی انتهایی تولید می کند که باید چشم پوشی شود.
- اگر $a < b$ ، عمل جمع هیچ گونه رقم نقلی انتهایی تولید نمی کند، برای یافتن جواب مکمل مینا حاصل جمع را بدست می آوریم و سپس یک علامت منفی در جلوی آن می گذاریم.

$$\begin{array}{r}
 (3250)_{10} - (72532)_{10} = ? \\
 \phantom{(3250)_{10} - (72532)_{10} = ?} + [27468]_{10} \\
 \hline
 30718 \quad \xrightarrow{\text{مکمل 10}} \quad -69282
 \end{array}$$

جمع دو عدد دودویی علامت دار در سیستم مکمل ۲

- مشابه اعداد بی علامت جمع می کنیم و از رقم نقلی تولید شده از آخرین مکان، صرف نظر می کنیم.

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 (1101)_2 = -3 \\
 + (0110)_2 = +6 \\
 \hline
 1 (0011)_2 = +3
 \end{array}$$

سرریز (Overflow)

اعداد در کامپیوتر با طول محدود و تعداد بیت های مشخص به کار برده می شوند. اگر نتیجه محاسبات خارج از این محدوده شود و بیت های بیشتر در دسترس نباشد، این بیت های اضافی حذف خواهد شد و نتیجه بدست آمده صحیح نخواهد بود. در این حالت گوییم در انجام محاسبه سرریز اتفاق افتاده است.

تشخیص سرریز دو عدد بدون علامت

در جمع اعداد بدون علامت، اگر پس از جمع دو عدد بدون علامت رقم نقلی نهایی یک شود سرریز اتفاق افتاده است.

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 (1101)_2 = 13 \\
 + (1100)_2 = 12 \\
 \hline
 1(1001)_2 = 9
 \end{array}$$

تشخیص سرریز دو عدد علامت دار در سیستم مکمل ۲

- راه اول: اگر جمع دو عدد منفی، مثبت شود یا جمع دو عدد مثبت، منفی شود، سرریز است. دقت کنید جمع عدد منفی با عدد مثبت سرریز ندارد.
- راه دوم: اگر رقم نقلی وارد شده به بیت سمت چپ با نقلی خارج شده از آن یکسان نباشد، سرریز است.

تشخیص سرریز دو عدد علامت دار در سیستم مکمل ۲

$$\begin{array}{r}
 c_n \quad c_{n-1} \quad c_{n-2} \quad c_1 \quad c_0 \\
 a_{n-1} \quad a_{n-2} \quad a_1 \quad a_0 \\
 + \quad b_{n-1} \quad b_{n-2} \quad b_1 \quad b_0 \\
 \hline
 s_{n-1} \quad s_{n-2} \quad s_1 \quad s_0
 \end{array}$$

1) if $a_{n-1} = b_{n-1} \neq s_{n-1}$ then $v=1$ $v = a_{n-1} b_{n-1} \bar{s}_{n-1} + \bar{a}_{n-1} \bar{b}_{n-1} s_{n-1}$

تفریق دو عدد دودویی علامت دار در سیستم مکمل ۲

- عدد اول را با مکمل ۲ عدد دوم جمع می کنیم، و از رقم نقلی خروجی از مکان بیت علامت چشم پوشی می کنیم.

$$\underbrace{(11111010)_2}_{(-6)_{10}} - \underbrace{(11110011)_2}_{(-13)_{10}} = ?$$

$$(00000110)_2 = +6$$

$$\begin{array}{r}
 11111010 = -6 \\
 + 00001101 = +13 \\
 \hline
 100000111 = +7
 \end{array}$$

کد کردن ارقام دهدهی

کدها باید به صورت دودویی باشند زیرا کامپیوترها فقط قادرند صفرها و یک ها را نگه داری کنند.

کدها فقط نماد یا سمبل نمایش اطلاعات را عوض می کنند و نه مفهوم آن ها را.

کدهای دودویی برای نمایش ارقام دهدهی

رقم دهدهی	BCD	2 4 2 1	افزونی 3	8 4 -2 -1
$(18)_{10}$	0000	0000	0011	0000
	0001	0001	0100	0111
$(0001\ 1000)_{BCD}$	0010	0010	0101	0110
	0011	0011	0110	0101
$(10010)_2$	0100	0100	0111	0100
	0101	1011	1000	1011
	0110	1100	1001	1010
	0111	1101	1010	1001
	1000	1110	1011	1000
	1001	1111	1101	1111

کد گری (Gray)

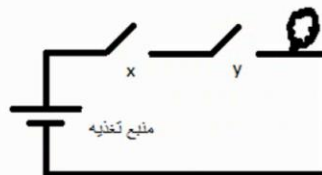
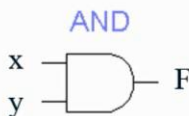
کدهای حلقوی: بین هر کلمه کد و کلمه کد بعدی تنها یک بیت تغییر کرده باشد.
از معروف ترین کدهای حلقوی کد گری است.

رقم دهدهی	Gray
0	0000
1	0001
2	0011
3	0010
4	0110
5	0111
6	0101
7	0100

رقم دهدهی	Gray
8	1100
9	1101
10	1111
11	1110
12	1010
13	1011
14	1001
15	1000

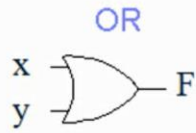
عملگر AND

بسته بودن کلید معادل یک و باز بودن کلید را معادل صفر فرض کنید.
روشن بودن لامپ معادل یک و خاموش بودن لامپ را معادل صفر فرض کنید.

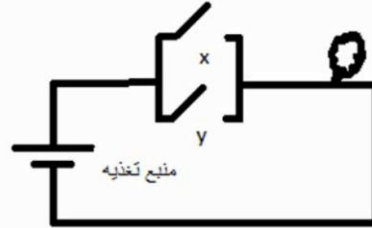


x	y	F = x.y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

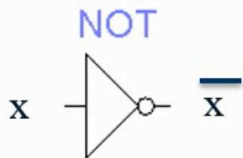
عملگر OR



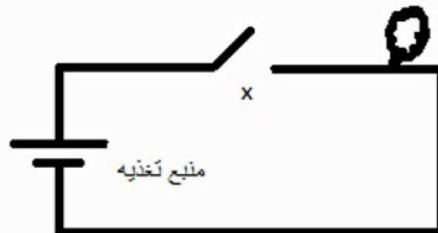
x	y	$F = x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



عملگر NOT



x	F
0	1
1	0



AND gate

A	B	Q
0	0	0

INPUT OUTPUT

OR gate

A	B	Q
0	0	0

INPUT OUTPUT

NAND gate

A	B	Q
0	0	1

INPUT OUTPUT

NOR gate

A	B	Q
0	0	1

INPUT OUTPUT

INVERTER gate

A	Q
0	1

INPUT OUTPUT

AND gate

A	B	Q
LOW	LOW	LOW

INPUT OUTPUT

AND gate

A	B	Q
OFF	OFF	OFF

INPUT OUTPUT

AND gate

A	B	Q
FALSE	FALSE	FALSE

INPUT OUTPUT

جبر بول دو ارزشی

- متغیر بولی متغیری است که می تواند ۰ یا ۱ باشد.
- تابع بولی تابعی است که از تعدادی یا هیچ متغیر بولی تشکیل شده است.
- به هرمتغیر یا مکمل متغیر، لیترال گویند.
- تقدم عملگرها: پرانتز، not، AND، OR

توابع بولی متشکل از دو متغیر

- تعداد توابع بولی متفاوت که با n متغیر بولی می توان ساخت 2^{2^n}

ab	\bar{a}	\bar{b}	a.b	a+b	$a \uparrow b$	$a \downarrow b$	$a \oplus b$	$a \odot b$	$\bar{a}\bar{b}$	$a+\bar{b}$	$a\bar{b}$	$\bar{a}+b$	a	b	0	1
00	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1
01	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1
10	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1
11	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1
	not	not	AND	OR	NAND	NOR	XOR	XNOR	$a < b$	$a \geq b$	$a > b$	$a \leq b$				

دوگان (dual) تابع

در یک تابع بولی اگر AND به OR، OR به AND، AND به OR، OR به AND، 0 به 1 و 1 به 0 تبدیل شود، دوگان تابع بدست می آید.

اصل Duality: اگر دو تابع با هم مساوی (هم ارز) باشند آن گاه دوگان آن دو تابع نیز با هم مساوی هستند.

$$a + 0 = a$$

$$a \cdot 1 = a$$

متمم تابع

- دوگان یک تابع را بدست می آوریم، سپس متمم هر متغیر را می نویسیم.

مثال:

$$F = \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z$$

دوگان تابع

$$(\bar{x} + y + \bar{z}) \cdot (\bar{x} + \bar{y} + z)$$

متمم هر متغیر

$$(x + \bar{y} + z) \cdot (\bar{x} + y + \bar{z})$$

جبر بول، جبر مجموعه ها، جبر گزاره ها

جبر گزاره ها	جبر مجموعه ها	جبر بول
ترکیب عطفی \wedge	اشتراک \cap	AND \cdot
ترکیب فصلی \vee	اجتماع \cup	OR $+$
نقیض $\sim A$	مکمل \bar{A}	not \bar{a}
False	تهی \emptyset	0
True	مرجع M	1
$\bar{a} \vee a \oplus$	تفاضل متقارن Δ	XOR \oplus

خواص جبر بول

$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$	عضو همانی (خنثی Identity)
$a \cdot 0 = 0$	$a + 1 = 1$	غلبه
$a + a = a$	$a \cdot a = a$	خود توانی (Idempotency)
$a + \bar{a} = 1$	$a \cdot \bar{a} = 0$	عضو مکمل
$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$	جابجایی (Commutative)
$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	شرکت پذیری (Associative)
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	$a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c)$	پخشی (توزیع پذیری)
$a + a \cdot b = a$	$a \cdot (a + b) = a$	جذب
$a + \bar{a} \cdot b = a + b$	$a \cdot (\bar{a} + b) = a \cdot b$	شبه جذب
$\overline{(a + b)} = \bar{a} \cdot \bar{b}$	$\overline{(a \cdot b)} = \bar{a} + \bar{b}$	دمورگان

اثبات خاصیت جابه جایی با استفاده از جدول درستی

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$a + b = b + a$$

a	b	a . b	b . a	a + b	b + a
0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1

اثبات خاصیت جذب با استفاده از روابط جبری

$$a + a.b = a$$

$$a + a.b = a.1 + a.b$$

$$= a.(1+b)$$

$$= a.1$$

فرم های نرمال

- SOP (Sum of Products) : اگر تابعی به صورت جمع حاصل ضرب ها باشد به آن SOP گویند.

$$F = a.b + \bar{a}.c + b.c$$

- POS (Product of Sums) : اگر تابعی به صورت ضرب حاصل جمع ها باشد به آن POS گویند.

$$G = (a+b) . (\bar{a}+c)$$

مینترم و ماکسترم

- مینترم (minterm) : جمله ای است به صورت ضرب که در آن همه لیترال ها دقیقا یک بار ظاهر شده باشد.
- **مثال:** با سه متغیر a، b، c جملات a.b.c و $\bar{a}.\bar{b}.c$ و ... مینترم هستند.
- با n متغیر بولی می توان 2^n مینترم نوشت.
- ماکسترم (Maxterm) : جمله ای است به صورت ضرب که در آن همه لیترال ها دقیقا یک بار ظاهر شده باشد.
- **مثال:** با سه متغیر a، b، c جملات $a+b+c$ و $\bar{a}+\bar{b}+c$ و ... ماکسترم هستند.

مینترم ها و ماکسترم ها برای ۳ متغیر

x	y	z	Minterm	Maxterm
0	0	0	$x'.y'.z' = m_0$	$x+y+z = M_0$
0	0	1	$x'.y'.z = m_1$	$x+y+z' = M_1$
0	1	0	$x'.y.z' = m_2$	$x+y'+z = M_2$
0	1	1	$x'.y.z = m_3$	$x+y'+z' = M_3$
1	0	0	$x.y'.z' = m_4$	$x'+y+z = M_4$
1	0	1	$x.y'.z = m_5$	$x'+y+z' = M_5$
1	1	0	$x.y.z' = m_6$	$x'+y'+z = M_6$
1	1	1	$x.y.z = m_7$	$x'+y'+z' = M_7$

مینترم ها و ماکسترم ها

- هر مینترم فقط در یک حالت برابر یک می شود.
- هر ماکسترم فقط در یک حالت برابر صفر می شود.
- ضرب مینترم در ماکسترم غیر هم شماره اش برابر مینترم است.
- ضرب مینترم در ماکسترم هم شماره اش برابر صفر است.
- جمع مینترم با ماکسترم غیر هم شماره اش برابر ماکسترم است.
- جمع مینترم با ماکسترم هم شماره اش برابر یک است.

جمع مینترم ها و ضرب ماکسترم ها

جمع مینترم ها: هر تابعی را می توان به صورت منحصر به فرد به شکل جمع تعدادی مینترم نوشت که به آن Canonical SOP (CSP) یا SOP متعارف یا PDNF گویند و با \sum نشان می دهیم.

ضرب ماکسترم ها: هر تابعی را می توان به صورت منحصر به فرد به شکل ضرب تعدادی ماکسترم نوشت که به آن Canonical POS (CPS) یا POS متعارف یا PCNF گویند و با \prod نشان می دهیم.

جمع مینترم ها و ضرب ماکسترم ها

• مثال: تابع $F(a,b,c) = a\bar{b} + \bar{c}$ را بصورت جمع مینترم ها و ضرب ماکسترم ها بنویسید.

- روش اول:

$$\begin{aligned}
 F(a,b,c) &= a\bar{b} + \bar{c} \\
 &= a\bar{b}(c + \bar{c}) + \bar{c}(a + \bar{a})(b + \bar{b}) \\
 &= a\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c + \bar{c}a\bar{b} + \bar{c}\bar{a}\bar{b} \\
 &= m_0 + m_2 + m_4 + m_5 + m_6 = \sum m(0,2,4,5,6) \\
 &= M_1.M_3.M_7
 \end{aligned}$$

جمع مینترم ها و ضرب ماکسترم ها

سوم

روش سوم:

$$F(a,b,c) = \underline{a \cdot \bar{b}} + \underline{\bar{a} \cdot c}$$

$$= m_0 + m_1 + m_4 + m_5 + m_6$$

روش دوم:

abc	F
000	1 = m ₀
001	0 = M ₁
010	1 = m ₂
011	0 = M ₃
100	1 = m ₄
101	1 = m ₅
110	1 = m ₆
111	0 = M ₇

مراحل طراحی مدارات ترکیبی

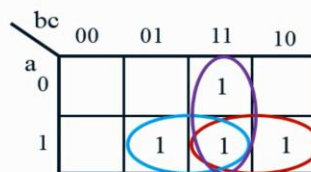
سوم

- با توجه به توصیف مسئله تعداد ورودی ها و خروجی ها را مشخص کنید.
- رسم جدول درستی

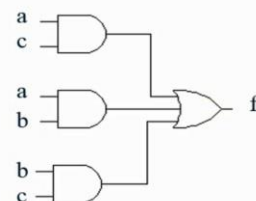
طراحی مدارات ترکیبی

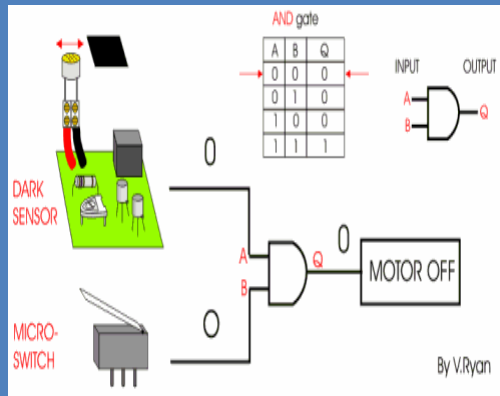
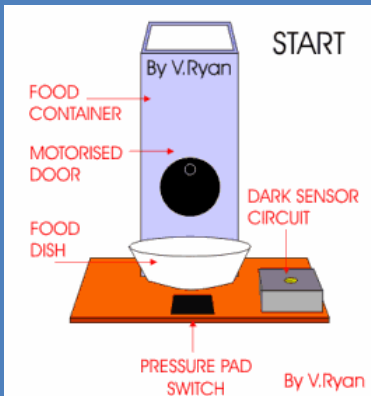
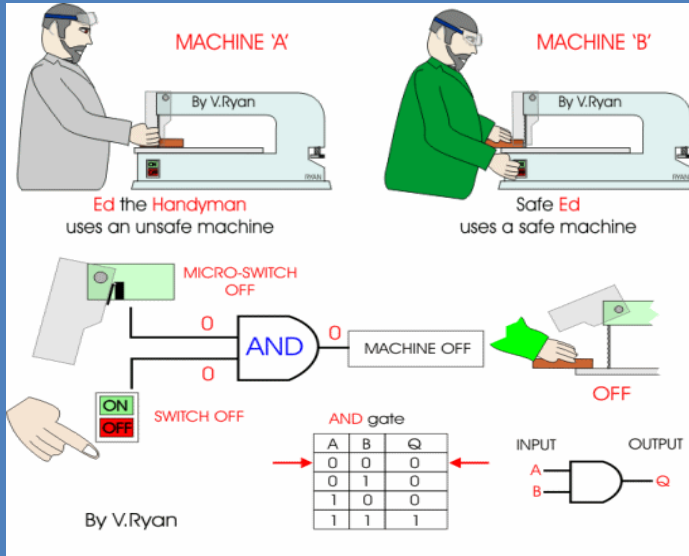
- مثال: مداری طراحی کنید که براساس اکثریت آرای ۳ نفر یک رای صادر کند.

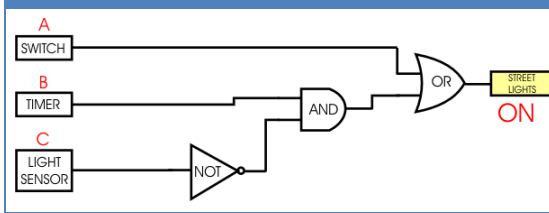
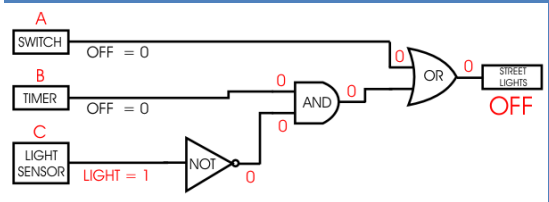
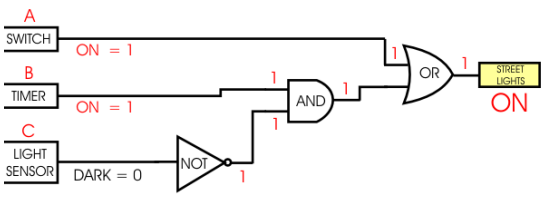
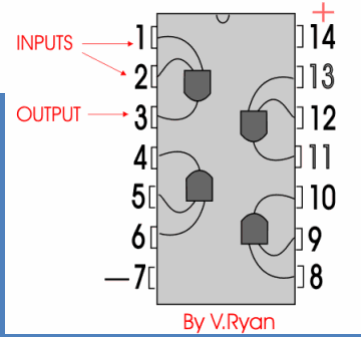
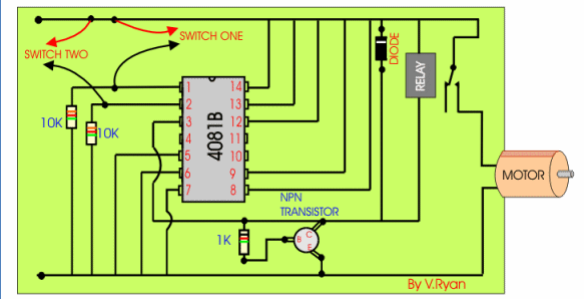
abc	f
000	0
001	0
010	0
011	1
100	0
101	1
110	1
111	1



$$f = a \cdot c + \underline{a \cdot b} + b \cdot c$$





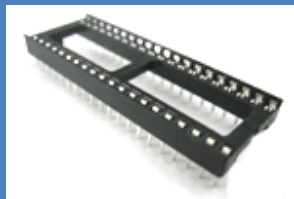
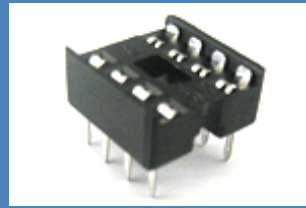


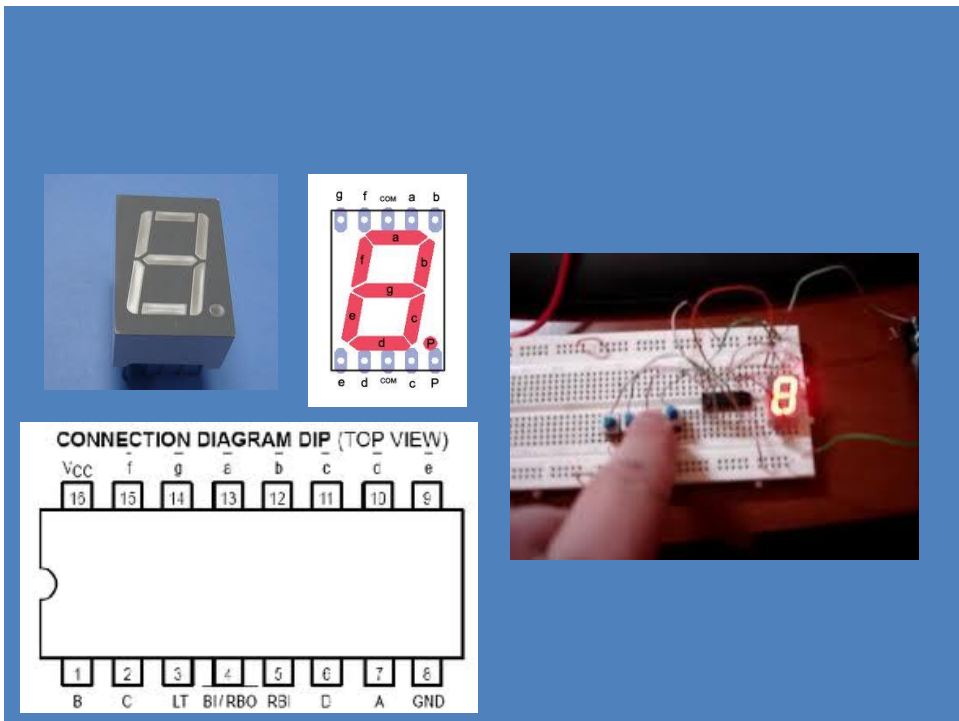
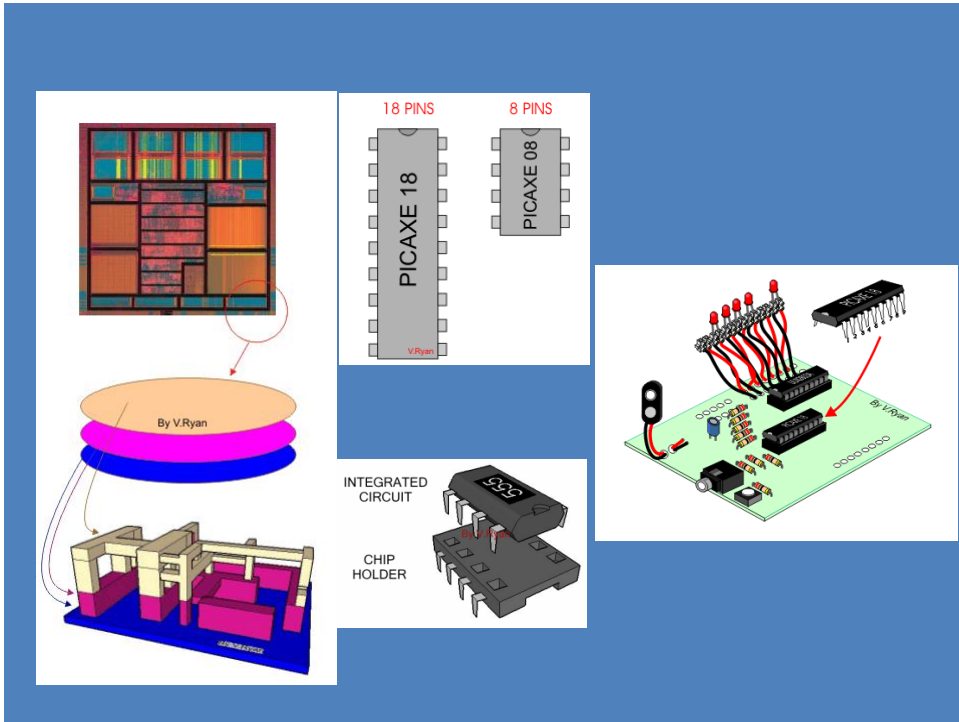
BINARY CONVERSION	64	32	16	8	4	2	1
DECIMAL 10				1	0	1	0
DECIMAL 60		1	1	1	1	0	0
DECIMAL 38		1	0	0	1	1	0
DECIMAL 44							
DECIMAL 19							
DECIMAL 27							
DECIMAL 7							

BINARY CONVERSION	64	32	16	8	4	2	1
DECIMAL 10				1	0	1	0

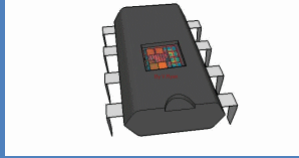
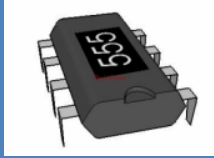
BINARY CONVERSION	64	32	16	8	4	2	1
DECIMAL 60		1	1	1	1	0	0

سوکت





555

**D, N, FE Packages** fig. 2