

تجزیه و تحلیل داده ها در نساجی

پردازش تصویر

دکتر پدram پیوندی

بخش هفتم

www.pedram-payvandy.com
peivandi@yazduni.ac.ir

فیلترهای حوزه فرکانسی

Fourier Analysis

آنالیز فوریه

$$f(t) = \sum_i \omega_i \phi_i(x)$$

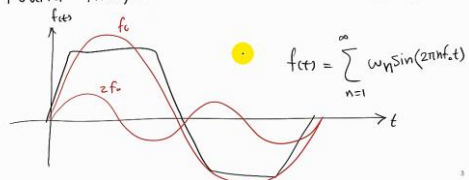
kernel

www.pedram-payvandy.com
peivandi@yazduni.ac.ir

فیلترهای حوزه فرکانسی

Fourier Analysis

آنالیز فوریه

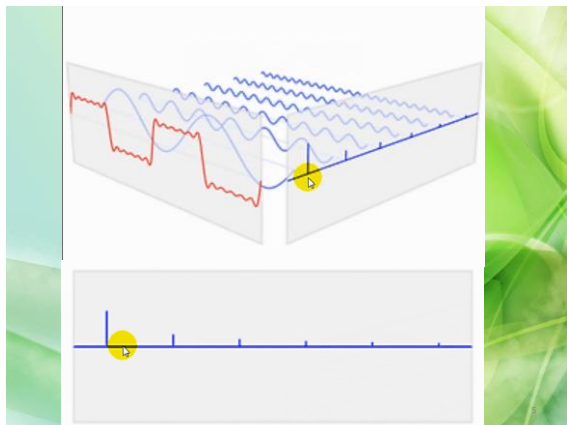


www.pedram-payvandy.com
peivandi@yazduni.ac.ir

فیلترهای حوزه فرکانسی

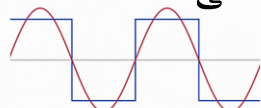


www.pedram-pavvandy.com
peivandi@yazduni.ac.ir





فیلترهای حوزه فرکانسی

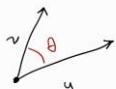


Inner Product

ضرب داخلی

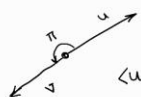
$$u = (u_1, u_2)$$

$$v = (v_1, v_2)$$



$$\langle u, v \rangle = u \cdot v = u^T v = u_1 v_1 + u_2 v_2 = |u| \cdot |v| \cdot \cos \theta$$

فیلترهای حوزه فرکانسی



$$\langle u, v \rangle = -1$$



$$\langle u, v \rangle = 0$$



$$\langle u, v \rangle = +1$$

www.pedram-payvandy.com
peivandi@yazduni.ac.ir

فیلترهای حوزه فرکانسی

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$u^T v = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

www.pedram-payvandy.com
peivandi@yazduni.ac.ir

فیلترهای حوزه فرکانسی

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$u^* v = \sum_{i=1}^n u_i^* v_i$$

www.pedram-payvandy.com
peivandi@yazduni.ac.ir

فیلترهای حوزه فرکانسی

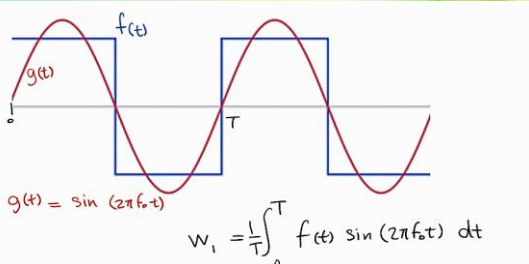
$$f(x)$$

$$g(x)$$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x)^* dx$$

www.pedram-payvandy.com
peivandi@yazduni.ac.ir

فیلترهای حوزه فرکانسی



www.pedram-payvandy.com
peivandi@yazduni.ac.ir

فیلترهای حوزه فرکانسی

$f(t)$: دوره تناوب T $f_0 = \frac{1}{T}$

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)]$$

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt \\ b_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt \end{cases} \quad \text{سری فوریه}$$

www.pedram-payvandy.com
peivandi@yazduni.ac.ir

فیلترهای حوزه فرکانسی

Fourier Transform $nf_0 \rightarrow \xi$ تبدیل فوریه

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi \xi t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [e^{j2\pi \xi t}]^* dt \end{aligned}$$

www.pedram-payvandy.com
peivandi@yazduni.ac.ir

فیلترهای حوزه فرکانسی

تاج پیوسته و متناوب ← سری فوریه ← ترکیب خطی از عملیات سینوسی

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)$$

www.pedram-payvandy.com
peivandi@yazduni.ac.ir

فیلترهای حوزه فرکانسی



www.pedram-pavvandy.com
peivandi@yazduni.ac.ir

فیلترهای حوزه فرکانسی



www.pedram-pavvandy.com
peivandi@yazduni.ac.ir

فیلترهای حوزه فرکانسی

$f(x,y)$ \xleftrightarrow{F} $F(u,v)$

$M \times N$ $M \times N$

حوزه مکان حوزه فرکانسی

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-2\pi j \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)}$$

$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{2\pi j \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)}$$

28

فیلترهای حوزه فرکانسی

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad \sin(2\pi f_c t)$$

$$e^{2\pi j \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} =$$

$$\cos \left(\frac{2\pi ux}{M} + \frac{2\pi vy}{N} \right) + j \sin \left(\frac{2\pi ux}{M} + \frac{2\pi vy}{N} \right)$$

www.pedram-payvandy.com
peivandi@yazduni.ac.ir

فیلترهای حوزه فرکانسی

$$F(u,v) = \underbrace{R(u,v)}_{\text{Real Part}} + j \underbrace{I(u,v)}_{\text{Imaginary Part}}$$

$$= \underbrace{A(u,v)}_{\text{Absolute Value}} e^{-j \underbrace{\phi(u,v)}_{\text{Phase}}}$$

$$A(u,v) = |F(u,v)| \quad \text{Value} = \text{Spectrum}$$

www.pedram-payvandy.com
peivandi@yazduni.ac.ir

فیلترهای حوزه فرکانسی

$$F(u,v) = F(\pm u, \pm v)$$

$$\updownarrow$$

$$\forall x, y: f(x, y) \in \mathbb{R}$$

www.pedram-payvandy.com
peivandi@yazduni.ac.ir

فیلترهای حوزه فرکانسی

$$F(0,0) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)$$

$$= MN \left(\frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \right)$$

DC. Gain میانگین

www.pedram-pavvandy.com
peivandi@yazduni.ac.ir

fft2

2-D fast Fourier transform

Syntax

```
Y = fft2(X)
Y = fft2(X,m,n)
```

Description

`Y = fft2(X)` returns the two-dimensional discrete Fourier transform (DFT) of `X`, computed with a fast Fourier transform (FFT) algorithm. The result `Y` is the same size as `X`.

`Y = fft2(X,m,n)` truncates `X`, or pads `X` with zeros to create an `m`-by-`n` array before doing the transform. The result is `m`-by-`n`.

ifft2

2-D inverse fast Fourier transform

Syntax

```
Y = ifft2(X)
Y = ifft2(X,m,n)
y = ifft2(..., 'symmetric')
y = ifft2(..., 'nonsymmetric')
```

فیلترهای حوزه فرکانسی

ifft2

2-D inverse fast Fourier transform

Syntax

```
Y = ifft2(X)
Y = ifft2(X,m,n)
y = ifft2(..., 'symmetric')
y = ifft2(..., 'nonsymmetric')
```

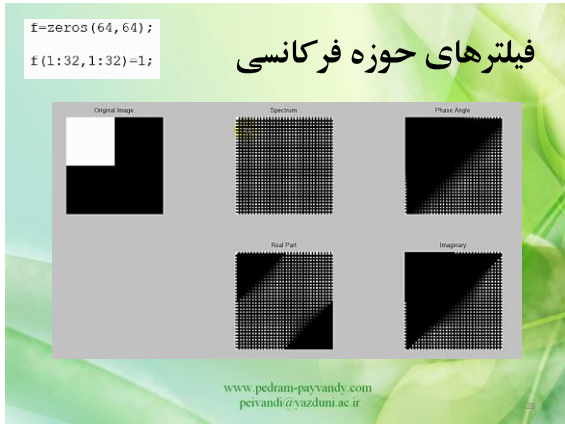
Description

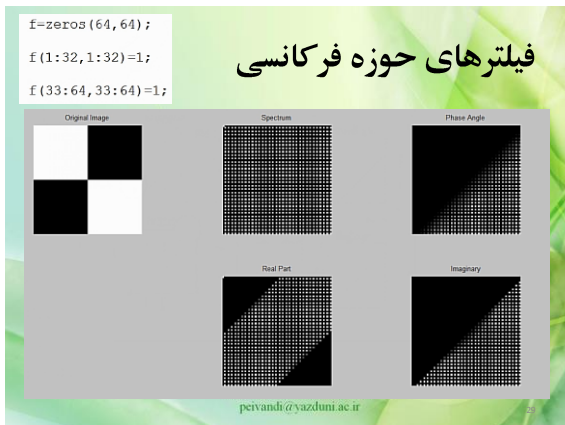
`Y = ifft2(X)` returns the two-dimensional inverse discrete Fourier transform (DFT) of `X`, computed with a fast Fourier transform (FFT) algorithm. The result `Y` is the same size as `X`.

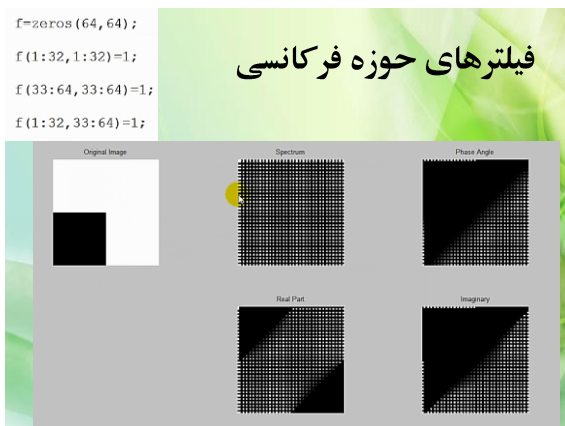
`ifft2` tests `X` to see whether it is *conjugate symmetric*. If so, the computation is faster and the output is real. An `M`-by-`N` matrix `X` is conjugate symmetric if `X(i,j) = conj(X(mod(M-i+1, M)+1, mod(N-j+1, N)+1))` for each element of `X`.

`Y = ifft2(X,m,n)` returns the `m`-by-`n` inverse fast Fourier transform of matrix `X`.

`y = ifft2(..., 'symmetric')` causes `ifft2` to treat `X` as conjugate symmetric. This option is useful when `X` is not exactly conjugate symmetric, merely because of round-off error.





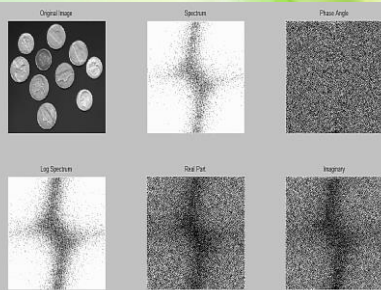


فیلترهای حوزه فرکانسی

```

1 clc;
2 clear;
3 close all;
4
5 f=imread('coins.png');
6 f=im2double(f);
7
8 F=fft2(f);
9
10 A=abs(F);
11
12 L=log(1+A);
13
14 Phi=angle(F);
15
16 R=real(F);
17
18 I=imag(F);
19
20

```



peyvandi@yazduni.ac.ir

فیلترهای حوزه فرکانسی

```

1 clc;
2 clear;
3 close all;
4
5 A=zeros(64,64);
6
7 Phi=zeros(64,64);
8
9 A(1,1)=0;
10
11 A(1,5)=2000;
12
13 F=A.*exp(1j*Phi);
14
15 f=ifft2(F);
16

```



فیلترهای حوزه فرکانسی

```

1 clc;
2 clear;
3 close all;
4
5 A=zeros(64,64);
6
7 Phi=zeros(64,64);
8
9 A(3,1)=3000;
10
11 F=A.*exp(1j*Phi);
12
13 f=ifft2(F);
14

```



```

clc;
clear;
close all;

A=zeros(64,64);

Phi=zeros(64,64);

A(33,1)=4096;

F=A.*exp(1j*Phi);

f=ifft2(F);
    
```

فیلترهای حوزه فرکانسی

peivanah@yazduni.ac.ir

```

clc;
clear;
close all;

A=zeros(64,64);

Phi=zeros(64,64);

A(33,1)=4096;

A(1,33)=2048;

F=A.*exp(1j*Phi);

f=ifft2(F);
    
```

فیلترهای حوزه فرکانسی

```

clc;
clear;
close all;

A=zeros(64,64);

Phi=zeros(64,64);

A(7,4)=4096;

A(4,7)=4096;

F=A.*exp(1j*Phi);

f=ifft2(F);
    
```

فیلترهای حوزه فرکانسی

فیلترهای حوزه فرکانسی

$A(1, 33) = 4096;$
 $A(33, 1) = 4096;$

$A(1, 17) = 4096;$
 $A(17, 1) = 4096;$

$A(1, 9) = 4096;$
 $A(9, 1) = 4096;$

www.pedram-payvandy.com
peivandi@yazduni.ac.ir

فیلترهای حوزه فرکانسی

```

f=randn(256,256);
F=fft2(f);
A=abs(F);
L=log(1+A);
Phi=angle(F);
R=real(F);
I=imag(F);
    
```

www.pedram-payvandy.com
peivandi@yazduni.ac.ir

فیلترهای حوزه فرکانسی

$$f * h \xleftrightarrow{F} F \cdot H$$

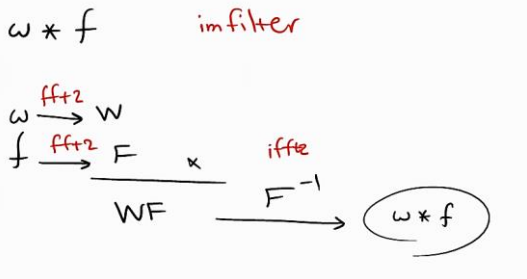
Convolution ضرب ساده

$$f \cdot h \xleftrightarrow{F} F * H$$

ضرب

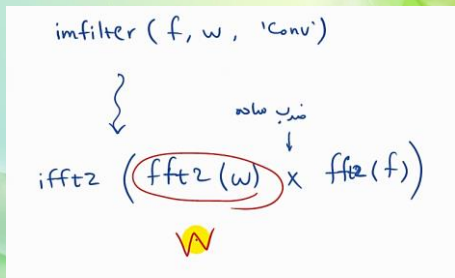
www.pedram-payvandy.com
peivandi@yazduni.ac.ir

فیلترهای حوزه فرکانسی



www.pedram-payvandy.com
peivandi@yazduni.ac.ir

فیلترهای حوزه فرکانسی



www.pedram-payvandy.com
peivandi@yazduni.ac.ir

```

clc;
clear;
close all;

f=imread('rice.png');
f=im2double(f);

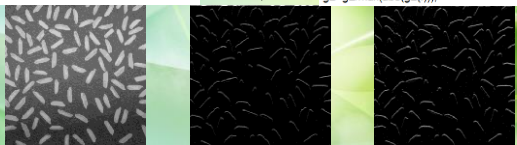
h=fspecial('sobel');

% 1
g1=imfilter(f,h,'conv'); % Spatial Filtering
g1=g1/max(abs(g1(:)));
    
```

فیلترهای حوزه فرکانسی

```

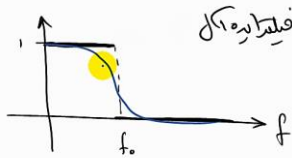
% 2
F=fft2(f);
H=fft2(h,size(f,1),size(f,2));
G2=H.*F;
g2=fft2(G2); % Frequency Filtering
g2=g2/max(abs(g2(:)));
    
```



www.pedram-payvandy.com
peivandi@yazduni.ac.ir

فیلترهای حوزه فرکانسی

Low-pass Filter \rightarrow Smoothing



www.pedram-payvandy.com
peivandi@yazduni.ac.ir

فیلترهای حوزه فرکانسی

$D(u,v)$ \rightarrow معیار فاصله از مبدأ

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & D(u,v) \leq D_0 \\ 0 & D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

فیلتر ایده آل

www.pedram-payvandy.com
peivandi@yazduni.ac.ir

فیلترهای حوزه فرکانسی

Butterworth LP.

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{D}{D_0}\right)^{2n}}$$

Gaussian LP.

$$H(u,v) = \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{D}{D_0}\right)^2\right)$$

www.pedram-payvandy.com
peivandi@yazduni.ac.ir

فیلترهای حوزه فرکانسی

$$H_{HP}(u,v) = 1 - H_{LP}(u,v)$$

High-pass Filter

$$H_{LP}(u,v) = \begin{cases} 1 & D \geq D_0 \\ 0 & D < D_0 \end{cases}$$

Low-pass Filter

B.W.H.P

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{D-D_0}{D_0}\right)^{2n}}$$

G.H.P

$$H(u,v) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{D-D_0}{D_0}\right)^2\right)$$

فیلترهای حوزه فرکانسی

Band-Reject & Band-Pass

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & |D - D_0| \leq \frac{W}{2} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

www.pedram-payvandy.com
peivandi@yazduni.ac.ir

فیلترهای حوزه فرکانسی

B.W.B.P

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{D^2 - D_0^2}{WD}\right)^{2n}}$$

G.B.P

$$H(u,v) = \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{D^2 - D_0^2}{WD}\right)^2\right)$$

www.pedram-payvandy.com
peivandi@yazduni.ac.ir
